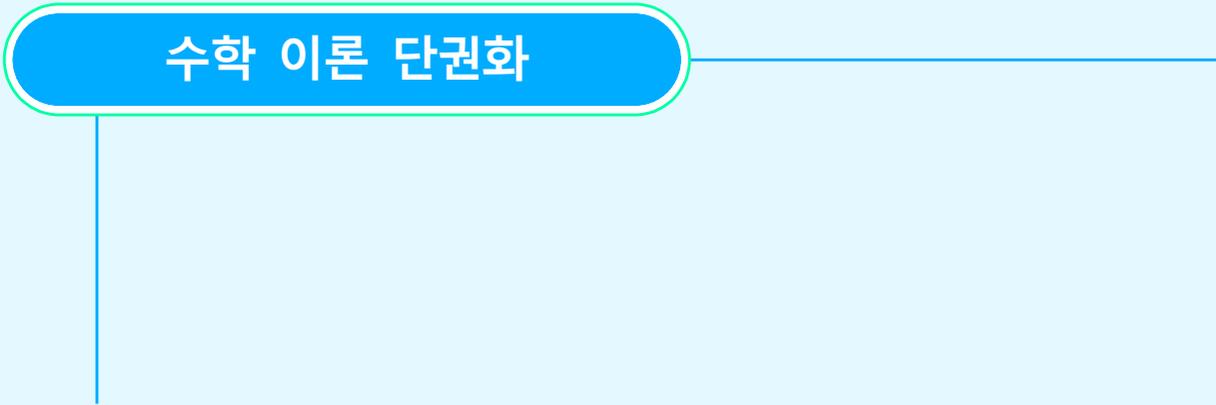


수학 이론 단권화



1 2015 개정 초등교육 과정

1. 성격 - 교과역량

- ① 문제해결 ♥
- ② 추론
- ③ 창의·융합
- ④ 의사소통 ★
- ⑤ 정보처리
- ⑥ 태도 및 실천

2. 목표

3. 내용체계 및 성취기준

가. 내용 체계

- ① 영역 : [수와 연산], [도형], [측정], [규칙성], [자료와 가능성]
- ② 영역의 하위범주 : 핵심개념, 일반화된 지식, 학년(군)별 내용요소, 기능

나 성취기준 : [1~2학년] [3~4학년] [5~6학년] ★★★

- (1) 수와 연산 ★★★♥ (2) 도형 ★ (3) 측정 ★★★♥ (4) 규칙성
- (5) 자료와 가능성 ★★
- (가) 학습요소
- (나) 성취기준 해설
- (다) 교수·학습 방법 및 유의사항
- (라) 평가 방법 및 유의사항

4. 교수·학습 및 평가의 방향

가. 교수·학습 방향

- (1) 교수·학습 원칙
- (2) 교수·학습 방법 ★★★

나. 평가 방향

- (1) 평가 원칙
- (2) 평가 방법 ★★★♥

2 2015 개정 지도서 총론

1. 2015 개정 수학과 교육과정

- 1. 초등 수학과 교육과정의 개정 방향 및 변화 내용
- 2. 수학교과 역량
- 3. 2015 개정 수학과 교육과정

2. 초등학교 수학 교과의 교수·학습 및 평가

1. 수학교육의 필요성

- 1) 실용적 가치 ★♥
- 2) 도야적 가치
- 3) 문화적 가치
- 4) 심미적 가치

2. 수학적 지식의 특성 및 수학적 사고의 방법

- 1) 수학적 지식의 특성
  - 가. 수학적 개념, 원리, 원칙
  - 나. 수학적 지식의 형성 과정에서 나타나는 특성 ★★
  - 다. 수학적 지식의 적용 및 발전 과정에서 나타나는 특성 ★♥
  - 라. 수학적 지식의 보존 및 정리 과정에서 나타나는 특성 ★★
- 2) 수학적 사고의 방법
  - 가. 직관과 논리 나. 가역적 사고 ★★
  - 다. 귀납적 ★★ 연역적 ★★ 유추적 사고 ★

3. 초등학교 수학 학습 및 지도

- 1) 수학에 대한 서로 다른 관점
- 2) 초등학교 수학 학습에 대한 관점 및 지도에 대한 접근 방법
- 3) 초등학교 수학 학습에 대한 대표적인 두 가지 관점
  - 가. 객관주의 기초한 학습 이론
  - 나. 구성주의에 기초한 학습 이론 ★
  - 다. 객관주의와 구성주의의 비교
- 4) 초등학교 수학 학습 지도에서 유의할 사항

2 2015 개정 지도서 총론

4. 초등학교 수학과 평가

- 1) 과정 중심 평가
  - 가. 결과 중심 평가와 과정 중심 평가
  - 나. 과정 중심 평가의 특징
  - 다. 과정 중심 평가의 실행

3. 초등학교 수학 수업 모형 및 교수·학습 과정 예시

1. 초등학교 수학 수업 모형

- 1) 개념 학습 모형 ★♥
- 2) 원리 탐구 학습 모형 ★★★♥
- 3) 귀납 추론 학습 모형 ★
- 4) 문제 해결 학습 모형 - 폴리아 ★★★♥

2. 수학 교수·학습 과정 예시

수학 교육 학자 [교과 교육론]

<p>1 베르트 하이머</p> <p>① 생산적/비생산적사고★</p> <p>② 통찰과★ 시행착오</p>	<p>2 피아제</p> <p>① 경험적/반영적추상화★</p> <p>② 동화/조절</p> <p>③ 인지발달 단계 ★</p>	<p>3 브루너</p> <p>① 수학 학습 이론</p> <p>② E I S ★★★♥♥</p> <p>③ 발견학습</p>
<p>4 디즈</p> <p>① 수학 개념학습 과정</p> <p>② 수학교육의 원리★</p>	<p>5 오스벨</p> <p>① 기계적/유미미 학습</p> <p>② 선행조직자 원리★</p>	<p>6 스킴프</p> <p>① 도구적 이해 ★★</p> <p>② 관계적 이해 ★★</p>
<p>7 반힐레</p> <p>① 가히학습수준 ★★★♥</p> <p>② 5단계 교수·학습법</p>	<p>8 프로이덴탈</p> <p>① 안내된 재발명</p> <p>② 수학적 과정 ★</p>	<p>9 가네</p> <p>① 학습 과제 분석</p> <p>② 학습의 유형</p>
<p>10 폴리아</p> <p>① 문제해결과정★★★</p> <p>② 문제해결전략 ★★★♥♥</p>	<p>11 비고츠키</p> <p>① 근접 발달 영역</p> <p>② 비계 설정</p>	<p>12 슌펠드</p> <p>① 자원 ② 발견학습</p> <p>③ 통제 ④ 신념 체계</p>

① 수학과 교육과정 개정의 방향



② 수학과 교육과정 개정의 방향 - 학습 부담 경감 추구♥

〈평가방법 및 유의사항〉신설!!

심화된 내용을 평가에서 다루지 않도록 안내



- 코끼리의 몸무게가 3t이라면 이를 g으로 나타내면 몇 g인가

측정 - (나) 교수·학습 방법 및 유의 사항

- 시간, 길이, 들어, 무게의 단위를 지도할 때 단위 사이의 관계를 이해하는 데 중점을 두고, 지나친 단위 환산은 다루지 않는다.

③ 수학과 교육과정 개정의 방향 - 학습자의 정의적 측면 강조

학습자의 정의적 측면 강조

◆ 교과 역량으로 '태도 및 실천' 추가

교수·학습 방법

(사) 태도 및 실천 능력을 함양하기 위한 교수·학습에서는 다음 사항을 강조한다.

①...

평가 방법

태도 및 실천 능력을 평가할 때는 관찰 평가, 면담 평가, 구술 평가, 자기 평가 등을 이용할 수 있다.

◆ 교수·학습 방법 및 유의 사항

(예) 기준을 정하여 분류할 때 학생들이 정한 다양한 기준을 존중하되, 분명하지 않은 기준일 경우에는 분류하는 것이 어려움을 인식하게 한다.

④ 교과역량

2015 개정 교육과정의 가장 주목할 만한 특징은 핵심역량(core competency)의 강조이다. 수학과는 경우 2009 개정 교육과정에 명시된 '문제 해결', '추론', '의사소통'의 세 가지 수학적 과정에 '창의·융합', '정보 처리', '태도 및 실천'의 세 가지를 추가하여 수학 교과 역량을 여섯 가지로 규정하였다.

수학에 대한 긍정적인 인식을 강화시키기 위해서는 수학 학습에서의 성공 경험이 중요하데, 성공 경험이란 수학 학습 과정에서 작은 성공을 경험함으로써 수학에 대한 열패감을 극복하고 자신감을 회복하는 것을 의미한다. 이와 더불어 수학과 교육과정은 학생들의 흥미, 가치, 인성, 의지, 즐거움, 성공 경험 등을 종합적으로 함양하는 것이 필요하다.

(사) 태도 및 실천 능력을 함양하기 위한 교수·학습에서는 다음 사항을 강조한다.

- ① 수학을 생활 주변과 사회 및 자연 현상과 관련지어 지도하여 수학의 필요성과 유용성을 알게 하고, 수학의 역할과 가치를 인식할 수 있게 한다.
- ② 수학에 대한 관심과 흥미, 호기심과 자신감을 갖고 수학 학습에 적극적으로 참여하게 하며, 끈기 있게 도전하도록 격려하고 학습 동기와 의욕을 유발한다.
- ③ 학생 스스로 목표를 설정하고 학습을 수행하며 학습 결과를 평가하는 자주적 학습 습관과 태도를 갖게 한다.
- ④ 수학적 활동을 통하여 정직하고 공정하며 책임감 있게 행동하고 어려움을 극복하기 위해 도전하는 용기 있는 태도, 타인을 배려하고 존중하며 협력하는 태도, 논리적 근거를 토대로 의견을 제시하고 합리적으로 의사 결정하는 태도를 갖고 이를 실천하게 한다.

⑤ 수학과 교육과정 개정의 방향 - 공학적 도구의 활용 강조 ★

교수·학습 방법

매체 및 도구 활용 학습은 학생의 수준과 학습 내용에 적합한 매체와 도구를 활용하여 흥미를 유발하고 학습의 효율성과 다양성을 도모하는 교수·학습 방법으로, 시청각 자료, 멀티미디어나 인터넷 등의 컴퓨터 활용 매체와 교구, 계산기, 교육용 소프트웨어 등의 도구를 이용한다.

공학적 도구의 활용 장점

활동 중심의 수학교육 이론들이 주장하는 수학교육 학습 원리를 구현하는 데에 도움을 줄 수 있다.

예를 들어 Dienes의 '지각적 다양성의 원리'나 '역동성의 원리'의 구현에 공학적 도구가 활용될 수 있다. 넷째, 공학적 도구는 형식적인 증명이나 개념 학습의 전 단계에서 그래프, 애니메이션, 동영상, 시뮬레이션 등을 통한 직관적인 탐구 활동을 제공할 수 있다. 공학적 도구의 시각적인 기능을 활용하면 증명 이전에 연역해야 할 사실에 대한 **직관적 이해** 또는 관찰에 의한 발견의 과정을 제공할 수 있다.

⑥ 수학과 교육과정 개정의 방향 - 학습 부담 경감 추구

학습 부담 경감 추구

<평가 방법 및 유의 사항> **신설!!**

심화된 내용을 평가에서 다루지 않도록 안내

초등학교  
5~6학년군 규칙성

비율을 평가할 때  
속력, 인구밀도, 축적  
농도 등을 구하는  
문제는 다루지  
않는다.

▪ 진하기가 18%인 소금물 5Kg을 만들려면  
소금과 물은 각각 얼마나 필요합니까?

문제출처 : 수학 6-1(교육부, 2015)

⑦ 수학과 교육과정 개정의 방향 - 실생활 중심의 통계 내용 재구성 ★♥

실생활 중심의 통계 내용 재구성

실생활 맥락에서 주어진 자료의 수동적인 처리에서  
머무르지 않고,

**자료의 수집, 분석, 해석 등 일련의  
과정을 다루는 것 강조!!**

초등학교- 자료를 수집, 분류하고, 표나 그래프로 정리하고, 해석하는 능력 함양

중학교- 확률과 통계 영역에서 '도수분포와 그래프'를 '자료의 정리와 해석'으로 변경

고등학교 <확률과 통계> - 자료수집 방법으로서 표본조사의 의미를 강조하고 미디어에 소개되는 통계 내용을 이해하는 통계적 소양 함양



⑧ 수학과 교육과정 주요내용 변화

도형

쌓기나무 활동에서 **물체의 위치와 방향 추가**  
(1~2학년군)

예시



쌓기나무 3개를  
3층으로 쌓고  
1층 쌓기나무의  
(위, 앞, 오른쪽)에  
쌓기나무 1개를  
놓습니다.

누리과정과의  
연계성 확보

① 성격 ★♥

수학과는 수학의 개념, 원리, 법칙을 이해하고 기능을 습득하여 주변의 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰하고 해석하며 논리적으로 사고하고 합리적으로 문제를 해결하는 능력과 태도를 기르는 교과이다. 수학 학습을 통해 학생들은 수학의 규칙성과 구조의 아름다움을 음미할 수 있고, 수학의 지식과 기능을 활용하여 수학 문제뿐만 아니라 실생활과 다른 교과의 문제를 창의적으로 해결할 수 있으며, 나아가 세계 공동체의 시민으로서 갖추어야 할 합리적 의사 결정 능력과 민주적 소통 능력을 함양할 수 있다.

수학과 교육과정에서 **초등학교 수학 내용**은 '수와 연산', '도형', '측정', '규칙성', '자료와 가능성'의 5개 영역으로 구성된다. '수와 연산' 영역에서는 자연수, 분수, 소수의 개념과 사칙계산을, '도형' 영역에서는 평면도형과 입체도형의 개념, 구성 요소, 성질과 공간 감각을, '측정' 영역에서는 시간, 길이, 둘레, 무게, 각도, 넓이, 부피의 측정과 어림을, '규칙성' 영역에서는 규칙 찾기, 비, 비례식을, '자료와 가능성' 영역에서는 자료의 수집, 분류, 정리, 해석과 사건이 일어날 가능성을 다룬다.

교과 역량으로서의 **문제 해결**은 해결 방법을 알고 있지 않은 문제 상황에서 수학의 지식과 기능을 활용하여 해결 전략을 탐색하고 최적의 해결 방안을 선택하여 주어진 문제를 해결하는 능력이고★, **추론**은 수학적 사실을 추측하고 논리적으로 분석하고 정당화하며 그 과정을 반성하는 능력이다. **창의·융합**은 수학의 지식과 기능을 토대로 새롭게 의미 있는 아이디어를 다양하고 풍부하게 산출하고 정교화하며, 여러 수학적 지식, 기능, 경험을 연결하거나 타 교과나 실생활의 지식, 기능, 경험을 수학과 연결·융합하여 새로운 지식, 기능, 경험을 생성하고 문제를 해결하는 능력이다. **의사소통**은 수학 지식이나 아이디어, 수학적 활동의 결과, 문제 해결 과정, 신념과 태도 등을 말이나 글, 그림, 기호로 표현하고 다른 사람의 아이디어를 이해하는 능력이고★, **정보 처리**는 다양한 자료와 정보를 수집, 정리, 분석, 활용하고 적절한 공학적 도구나 교구를 선택, 이용하여 자료와 정보를 효과적으로 처리하는 능력이다. 끝으로, **태도 및 실천**은 수학의 가치를 인식하고 자주적 수학 학습 태도와 민주 시민 의식을 갖추어 실천하는 능력이다.

수학 교과 역량 함양을 통해 학생들은 복잡하고 전문화되어 가는 미래 사회에서 사회 구성원의 역할을 성공적으로 수행할 수 있고 개인의 잠재력과 재능을 발휘할 수 있으며, 수학의 필요성과 유용성을 이해하고 수학 학습의 즐거움을 느끼며, 수학에 대한 흥미와 자신감을 기를 수 있다.

① 성격

[수학 교과 역량 하위요소 - 지도서 총론]

역량	하위요소	교수·학습 방법
문제 해결	① 문제 이해 및 전략탐색 ② 계획 실행 및 반성 ③ 협력적 문제 해결 ④ 수학적 모델링 ⑤ 문제 만들기	(나)
추론	① 관찰과 추측 ② 논리적 절차 수행 ③ 수학적 사실 분석 ④ 정당화 ⑤ 추론 과정의 반성	(다)
창의·융합	① 독창성 ② 유창성 ③ 융통성 ④ 정교성 ⑤ 수학 내적 연결 ⑥ 수학 외적 연결 융합	(라)
의사소통	① 수학적 표현의 이해 ② 수학적 표현의 개발 및 변환 ③ 자신의 생각 표현 ④ 타인의 생각 이해	(마)
정보 처리	① 자료와 정보 수집 ② 자료와 정보 정리 및 분석 ③ 정보 해석 및 활용 ④ 공학적 도구 및 교구 활용	(바)
태도 및 실천	① 가치 인식 ② 자주적 학습 태도 ③ 시민 의식	(사)

② 목표

수학의 개념, 원리, 법칙을 이해하고 기능을 습득하며 수학적으로 추론하고 의사소통하는 능력을 길러, 생활 주변과 사회 및 자연 현상을 수학적으로 이해하고 문제를 합리적이고 창의적으로 해결하며, 수학 학습자로서 바람직한 태도와 실천 능력을 기른다.

가. 초등학교

- 생활 주변 현상을 수학적으로 관찰하고 표현하는 경험을 통하여 수학의 기초적인 **개념, 원리, 법칙**을 이해하고 **수학의 기능**을 습득한다.
- 수학적으로 **추론**하고 **의사소통**하며, **창의·융합적 사고**와 **정보 처리 능력**을 바탕으로 **생활 주변 현상을 수학적으로 이해**하고 **문제를 합리적이고 창의적으로 해결**한다.
- 수학 학습의 즐거움을 느끼고 수학의 유용성을 인식하며 수학 학습자로서 바람직한 **태도**와 **실천 능력**을 기른다.

① 수학 교육의 필요성 / 초등 수학적 지식의 특성 및 수학적 사고의 방법

1. 수학 교육의 필요성

- ① 실용적 가치★♥    ② 문화적 가치
- ③ 도야적 가치        ④ 심미적 가치

2. 초등 수학적 지식의 특성 및 수학적 사고의 방법

(1) 초등 수학적 지식의 특성

가. 수학적 개념, 원리, 법칙

㉠ 수학적 개념

- ① 개별 개념 : 개별적인 대상을 나타내는 개념(㉡ 자연수, 홀수, 사각형, 원 등)
- ② 관계 개념 : 몇 개의 대상 사이의 관계를 나타내는 개념 (㉢ 공약수, 평행, 비례, 작다 등)
- ③ 조작 개념 : 두 가지 이상의 개별적인 대상으로 조작하는 개념 (㉣ 사칙계산 등)

㉡ 원리 : 수학의 일반적 성질을 증명 가능한 형태의 명제로 나타낸 것 (㉢ 분수는 무한히 많이 존재한다, 모든 삼각형의 내각의 합은 180°이다. 등)★

㉣ 법칙 : 모든 현상들의 원인과 결과 또는 사물과 사물 사이에 내재하는 보편적이며 필연적인 규칙 (㉤ 덧셈의 교환법칙 등)

③ 수학적 사고의 방법

(2) 수학적 사고의 방법

가. 직관과 논리 : 직관은 수학적 발상이고 논리는 그 직관적인 발상을 정교화하고 다듬는 일

나. 가역적 사고 : 어떤 변화가 일어난 상태에서 그 변화를 역으로 돌려 원래의 상태로 되돌릴 수 있는 사고 능력★

★ 각론 함께 보기

넓이는 2차원 양이므로 평면도형과 밀접한 관계가 있다. 따라서 넓이의 보존성이나 가법성, 연속성의 지도는 도형의 등적변형을 통해서 이루어진다. 초등 수학에서의 등적변형에는 합동인 도형의 성질을 써서 오려 붙이는 변형과 높이는 변하지 않게 하고 가로가 언제나 같도록 변형시킨 도형의 넓이는 항상 같다고 하는 카바리어리의 원리에 의한 변형의 두 가지가 있다.

다. 귀납적, 연역적, 유추적 사고

- ㉠ 귀납적 사고 : 개개의 구체적이나 특수한 사실에서 공통 요소를 찾아내어 일반적인 원리나 법칙을 이끌어 내는 사고 방법★
- ㉡ 연역적 사고 : 일반적인 명제나 보편적 원리나 법칙을 전제로 보다 특수하고 개별적인 명제나 또는 특수 원리나 법칙을 이끌어 내는 사고 방법★
- ㉢ 유추적 사고 : 이미 확보된 성질이나 명제에 기초하여 유사점을 기초로 특정한 사실로부터 그와 유사한 다른 특수한 사실의 성질을 추론하는 방법★

② 초등 수학적 지식의 특성

나. 수학적 지식의 형성 과정에서 나타나는 특성

- ㉠ 추상화 : 어떤 구체물의 집합에서 이질적인 요소들은 제거하고 동질적인 요소만을 추출하여 개념을 형성하는 과정★
- ㉡ 형식화 : 수학적 지식의 형성 과정에서 추상화를 통해 공통적인 규칙성이나 필요한 규칙이나 원리 등을 만들어 가는 과정★
- ㉢ 이상화 : 어떤 사물이나 현상에서 그 사물 자체에 속한 현실적인 제약을 무시하고 사고하려고 하는 개념에 맞추어 사물의 속성을 규정하는 과정★

다. 수학적 지식의 적용 및 발전 과정에서 나타나는 특성

- ㉠ 일반화 : 수학적 지식을 적용하고, 그것이 발전해 가는 과정에서 나타나는 특성으로 추상화된 개념을 보다 확장된 넓은 범위에 적용하는 과정★
- ㉡ 특수화 : 일반화에 대립되는 개념으로 수학적 지식을 적용하고, 그것이 발전해 가는 과정에서 일반적인 수학적 개념을 특수하고 구체적인 것에 적용하는 과정

라. 수학적 지식의 보존 및 정리 과정에서 나타나는 특성

- ㉠ 계통성 : 수학 내용의 위계적이고 누적적인 구성의 특징★★♥
- ㉡ 논리성 : 이론의 근거를 분명하고 정확하게 하기 위한 것으로, 가정에서 결론을 이끌어내는 분석적이고 단계적인 과정

④ 초등학교 수학 학습 및 지도

(1) 수학에 대한 서로 다른 관점

- ① 서로 관련 없는 기본 기능의 집합으로서의 수학
- ② 개념과 기능의 밀접한 연결망으로서의 수학
- ③ 세계를 이해하기 위한 사고 방법으로서의 수학

(2) 초등학교 수학 학습에 대한 관점 및 지도에 대한 접근 방법

가. 수학 학습에 대한 관점

- ① 기계적인 내용 암기로서 수학 학습
- ② 의미 있는 암기를 동반한 내용 이해로서 수학 학습
- ③ 수학적 사고의 탐구 과정으로서 수학 학습

나. 수학 지도에 대한 접근 방법

- ① 정보를 전달하는 과정으로서의 기능 중심 접근 : 기능 숙달을 위한 지도
- ② 의미 있는 학습 안내로서의 개념적 접근 : 이해를 위한 지도
- ③ 수학적 사고 촉진으로서의 문제 해결 접근 : 수학적 사고를 위한 지도

① 초등학교 수학 학습 및 지도

(3) 초등학교 수학 학습에 대한 대표적인 두 가지 관점

가. 객관주의에 기초한 학습 이론

- ① 행동주의 : 수학은 위계적인 특성을 가진 교과로 하위 개념에서 상위 개념으로 순차적으로 학습해야 한다.
- ② 손다이크, 스키너, 가네 등

나. 구성주의에 기초한 학습 이론★

- ① 브라우넬의 유의미 학습, 브루너의 EIS 이론, 디즈의 역동적 원리, 지각적 다양성의 원리, 수학적 다양성의 원리 등도 구성주의에 기반을 둔 학습 이론
- ② 구성주의의 세 가지 원리
  - 지식은 학생에 의하여 능동적으로 창조되거나 발견된다.
  - 학생들은 그들의 신체적, 정신적 행동에 대한 반성적 사고를 통하여 새로운 수학적 지식을 창조한다.
  - 학습은 사회적 과정(토의, 토론)을 반영한다.

교과 교육론 함께 보기★

[구성주의 교수·학습 원리]

- ① 학생 중심적 개별화의 원리    ② 발문 중심적 상호 작용의 원리
- ③ 의미 지향적 활동의 원리    ④ 반영적 추상화의 원리

지도서 각론 함께 보기

[수와 연산 - 구성주의적 접근]

- ① 여러 가지 방법    ② 어렵    ③ 실생활

② 초등학교 수학 학습 및 지도

다. 객관주의와 구성주의의 비교

비교 요소	객관주의	구성주의
지식에 대한 관점	절대적으로 존재하는 진리	개인의 경험에 바탕을 둔 개인적 지식의 구성
교육 목표	진리와 일치되는 지식 습득	개인의 의미 구성과 사회적 적합성
관심의 초점	외적 행동 및 결과에 초점	학습자의 사고 과정에 초점
학습 방법	강화(보상 또는 벌)로 행동 강화	학습자가 능동적으로 지식을 구성
학습자	지식의 수동적 습득자	지식의 능동적 창조자
교사 역할	지식의 전달자	지식 구성의 안내자
교육 방법	강의, 암기, 반복, 집단 학습	소집단 협동 학습, 토의·토론, 문제 해결 학습

③ 초등학교 수학 학습 지도에서 유의할 사항

(4) 초등학교 수학 학습 지도에서 유의할 사항

- ① 학생들의 발달 특성을 고려해야 한다.
- ② 학생들을 능동적으로 참여하게 한다.
  - 탐구하기와 의미 형성하기를 강조한다.
  - 반성적 사고와 메타 인지적 사고를 하게 한다.
- ③ 수학 학습은 구체적인 것에서부터 시작하여 추상적인 것으로 진행해야 한다.
  - 구체적 조작물과 모델을 사용한다
  - 개념적 이해가 이루어진 다음에 형식적 표현을 도입한다.
- ④ 이해를 촉진하기 위하여 의사소통을 강조한다.
  - 의미 형성을 촉진하기 위하여 말하기를 통한 의사소통을 강조한다.
  - 생각을 전달하기 위하여 쓰기를 통한 의사소통을 강조한다

(5) 초등학교 수학 교육의 방법

- ① 구체적인 조작 활동에 기초한 학습 → 피아제    ② 비형식적인 정의에서 출발하는 수업 → 비고츠키
- ③ 학습자의 현실 상황 반영 → 프로이덴탈    ④ 개념 분석에 기초한 지도 → 스킴프
- ⑤ 직관적 사고 수준 고려 → 피시바인    ⑥ 다양한 표현의 활용
- ⑦ 관찰, 귀납, 추측, 유추 등 추론 강조    ⑧ 아동의 흥미를 고려한 수업 → 디즈

④ 브라우넬 / 베르트하이머★

[브라우넬] : 유의미한 수학 학습 이론

- ① 학생들이 다양한 수학적 내용 사이의 관계와 패턴을 안다면 결국 반복 연습에 의해서 숙달시키려고 하는 수학적 개념을 더 잘 기억하게 될 것이다.
- ② 학생들에게 수학의 기초가 되는 개념과 기능인 수학의 구조를 가르친다면 유의미한 학습이 보다 잘 이루어질 것이다.

[베르트하이머] : ① 생산적 사고    ② 비생산적 사고★

- ① 생산적 사고와 비생산적 사고의 구별은 '통찰과 시행착오의 구별', '관계의 의미 있는 이해 대 기계적 연습에 의한 임의적 연결' 및 '구조적 이해 대 기계적 기억' 등으로 호칭되어 왔다.
- ② 통찰은 수학의 구조를 이해한 결과의 일부분으로 생긴다.

① 피아제★★

- ① 경험적 추상화 ② 반영적 추상화 ③ 동화 ④ 조절

- ① 경험적 추상화 : 일단의 대상으로부터 단지 그 공통 성질을 이끌어 내는 것★
- ② 반영적 추상화 : 구체물을 다루는 조작의 결과를 조정 또는 반성함으로써 그 특성을 이끌어 내는 것★
- ③ 동화 : 기존의 스키마를 고수하면서 가능한 넓은 범위의 상황을 그에 종속시키려는 기능
- ④ 조절 : 문제에 당면하여 자신의 스키마를 음미하고, 조정 · 분화하는 기능

③ 디즈★★♥

① 놀이를 통한 수학 개념 학습 과정 :

자유놀이 → 게임 → 공통성 탐구 → 표현 → 기호화 → 형식화

① 놀이를 통한 수학 개념 학습 과정

: 삼각형을 가르칠 때, 삼각형과 삼각형이 아닌 도형들을 구체물로 제시하고 자유롭게 모아 모양을 만들거나 분류해 보도록 할 수 있다(자유놀이). 다음으로 같은 종류의 도형을 찾는 게임을 하여 도형의 성질을 직관적으로 알아보게 한다(게임). 이어서 그 도형들이 공통으로 가지고 있는 성질을 생각해 보도록 할 수 있다(공통성 탐구). 그 성질을 언어적으로 표현하여 삼각형 개념을 지도할 수 있다(표현). 학년이 높아지면서 점차 꼭짓점과 변, 삼각형을 기호로 표현하여 다룰 수 있으며(기호화), 임의의 삼각형과 특수한 삼각형의 성질을 형식화하여 다룰 수 있다(형식화).

- ② 수학적 다양성의 원리에 따라서 개념의 일반화가 잘 이루어지도록 하려면 수학적 개념을 제시할 때 변화시킬 수 있는 것은 가능한 한 변화시켜서 다양하게 제시해야 한다.★★♥
- ③ 지각적 다양성 원리란 수학적 개념 형성에 있어서 그 개념의 본질을 깨뜨리지 않는 범위에서 가능한 한 다양한 지각적 형태로 제시하라는 것이다.★

② 수학 학습 원리

**역동적 원리:** 수학적 개념 형성을 위하여, 목표가 불분명하며 그 자체로 즐기는 예비 놀이 단계, 좀더 방향이 정해지고 목적을 지향하지만 추구하고 있는 것에 대한 명확한 인식은 없는 구조화된 놀이 단계, 형성된 개념을 고정시키고 적용하기 위한 실습 놀이 단계의 각각을 순차적으로 적절한 시기에 필수적인 경험으로서 제공해야 한다는 것이다.

**지각적 다양성의 원리:** 예를 들어 평행사변형을 종이 위해 그릴 수도 있고, 두 개의 합동인 나무로 된 삼각형으로 만들 수도 있고 점판위에 표시할 수도 있고, 벽지에 패턴에서도 찾을 수 있다.★

**수학적 다양성의 원리:** 예를 들어 평행사변형의 개념 학습을 위한 예를 제공한다면 대변이 평행이 되도록 유지하면서 각의 크기나 대변의 길이, 위치 등을 변화시킴으로써 모양을 변화시키는 것을 말한다.★★♥

**구성의 원리:** 아동은 분석적 사고를 하기 훨씬 이전에 구성적 사고를 발달시키므로 아동에게 제시하는 수학적 상황은 분석보다는 구성을 요구하는 것이 우선되어야 한다는 것이다.★

② 브루너★★★♥♥

① 인지 경로에 따른 수학 학습 과정 : EIS이론★★♥♥

- 활동적 표상: 활동적 체험적 이해
- 영상적 표상: 시각적 이해
- 상징적 표상: 개념적 논리적 이해

② 브루너의 수학교육 이론 : 구성이론, 기법이론, 대조와 변화이론, 연계이론

**구성 이론:** 수학적 법칙, 수학적 개념 또는 수학적 원리를 학습하는 방법은 수학적 법칙, 개념, 원리의 표현 방법을 구성하는 활동이라는 이론

**기법 이론:** 구성과 표현 방식이 아동들의 정신적 발달 수준에 적절한 기법을 포함하고 있다면 아동들에게 쉽게 이해되어진다고 설명하는 이론

**예:** 초등학교에서 방정식 문제를 해결하는 경우에 표현방식을  $5+2+\square=9$ 로 하면 학생들은  $\square$ 에 알맞은 숫자는 2라는 해를 쉽게 발견할 것이다.★

**대조와 변화 이론:** 수학적 개념의 구체적인 표기방식으로부터 좀 더 추상적인 표기방식으로 되는 과정은 상이하게 대조되는 개념과 각 개념에 대한 변화된 예를 포함하고 있다고 기술하는 이론

**예:** 도형에서 호, 반지름, 지름의 개념은 각각을 서로 대조하였을 때 아동들에게 좀 더 의미 있게 된다.

**연계 이론:** 수학에 대한 각각의 기능, 개념, 원리는 다른 기능, 개념, 원리에 연계되어 있다는 이론, 그러므로 교사는 학생들이 대조와 변화를 알도록 도와주는 것이 필요할 뿐만 아니라 학생들이 여러 가지 수학적 아이디어들 간에 연계성을 알게 할 필요가 있다.

**예:** 일대일 대응과 같은 것이나 동치류 같은 연계가 설명되어졌을 때에는 수학의 구조는 단순화되어 지고 학습은 용이하여 진다.

④ 스크램★★★★

<p><b>도구적 이해</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- 적당히 규칙을 기억하고 있으면서 그 규칙이 적용되는 이유를 모르고 그것을 문제해결에 적용하는 상태를 말한다. 즉 '분수와 분수를 곱할 때는 분모는 분모끼리 곱해서 다시 분모로 하고, 분자는 분자끼리 곱해서 다시 분자로 하면 된다'는 사실을 기억하고 적용한다.</li> <li>- 장점 : 도구적 이해에 의한 학습은 정리하기 쉽고 빠르게 학습 목표를 달성할 수 있다. 도구적 이해에 의한 학습 결과의 보상은 보다 즉각적이고 가시적이다.</li> </ul>
<p><b>관계적 이해</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- 방법과 이유를 아는 상태, 보다 일반적인 수학적 관계로부터 특정한 규칙이나 알고리즘을 연역할 수 있는 상태(즉, 무엇을 해야 할지, 그리고 왜 그런지를 모두 아는 것)를 말한다.</li> <li>- 장점 : 관계적 이해에 의한 학습은 새로운 과제 해결에 적용하기가 쉽다. 관계적 이해에 의한 학습은 기억하기가 쉽다. 관계적 이해 그 자체만으로도 하나의 목적으로 유효하다. 관계적 지식들은 질적으로 유기적이다.</li> </ul>

⑤ 오수벨★

[오수벨] : ① 기계적 학습 ② 유의미 학습(선행조직자)

- ① 기계적 학습 : 새로운 학습 내용을 기존의 인지 구조와 의미 있는 관련을 짓지 못하는 경우
- ② 유의미 학습 : 유의미적 학습 과제가 제시되고 학습자가 관련된 정착 아이디어를 소유하며, 인지 구조상의 아이디어와 새로운 과제를 관련시킬 수 있는 태세를 갖추게 될 때 일어남
- ③ 점진적 분화의 원리 : 교과와 가장 일반적 아이디어가 먼저 제시되고 특수한 것이 점차적으로 분화되어야 한다.
- ④ 선행조직자의 원리 : 선행조직자는 새로운 학습 과제를 소개하는 일반성, 추상성, 포괄성 등을 지닌 명제나 논의 또는 행위를 뜻하며, 새로 학습할 내용을 제시하기에 앞서 이 내용을 포함하는 보다 포괄적인 개념이나 원리 등이 지도되어야 함을 의미하는 것으로, 설명 조직자와 비교 조직자가 있다.

- 설명 조직자는 새로 학습될 자료의 안정된 통합과 파지를 위한 개념적 기초를 제공하는 역할을 한다. 예를 들어 직각삼각형의 성질에 대한 학습에 앞서 일반적으로 삼각형이란 무엇이며, 어떤 성질을 갖는지 설명함으로써 이를 설명 조직자로 사용할 수 있다.  
 - 새로 학습할 내용이 비교적 친숙한 자료인 경우, 이미 학습된 관련 자료와 비교하는 방법을 통해, 즉 비교 조직자를 이용해서 새로운 정보를 학습자의 기존 인지 구조에 존재하는 유사 개념과 통합시킬 뿐만 아니라 유사한 기존 아이디어와 새로운 아이디어 사이의 분별력을 증진시킬 수 있다.

⑧ 프로이덴탈★/ 비교초기

[프로이덴탈] : ① 수평적 수학적 ② 수직적 수학적

- ① 수평적 수학적 : 현실적 소재를 가지고 시작하여 이 소재로부터 개념을 추출하고 반성 과정을 통하여 학생들이 수평적 수학적 과정을 경험하도록 한다.
- ② 수직적 수학적 : 수평적 수학적 결과를 보다 세련된 형식화, 기호화, 그리고 추상화하도록 하여 일반화가 가능한 수직적 수학적 과정을 경험하도록 한다.



[수업에서의 수학적 과정]

[비교초기] : ① 근접 발달 영역 ② 비계 설정(스케폴딩)

- ① 근접 발달 영역 : 도움 없이 독자적 문제 해결에 의해서 결정되는 '현실의 발달 단계'와 어른의 지도를 받으면서 혹은 보다 능력 있는 친구와 함께 문제 해결을 통해서 결정되는 '잠재적 발달의 높은 단계' 사이의 거리를 말한다.
- ② 비계 설정 : 학습자의 현재의 지식과 기능, 새로운 과제의 요구 사이에 다리를 제공해야 한다.

⑥ 반힐★★★

[반힐] : ① 시각적 인식 ② 도형 분석적 수준 ③ 관계 수준 ④ 형식적 연역 수준 ⑤ 엄밀화 수준

제 1수준 시각적 인식 수준	전체로서의 시각적 외관에 의해 도형을 인식하는 수준으로 도형의 성질이나 도형 사이의 관계는 인식할 수 없다. 예) 기하학적인 용어(예를 들어, 삼각형)나 도형을 인식할 수 있다.
제 2수준 도형 분석적 수준	주어진 도형의 구성 요소나 성질을 분석할 수 있는 수준이지만 도형의 성질 간의 관계성은 인식하지 못하며 또한 명확한 수학적 정의를 내리지 못한다. 예) 직사각형을 보고, '마주 보는 두 변의 길이는 서로 같다'는 것을 인식
제 3수준 관계 수준	도형 사이에 존재하는 성질들의 논리적인 관계를 파악하여 도형의 포함관계와 수학적 정의를 이해할 수 있지만, 연역의 의미나 공리의 역할을 이해하지 못한다. 예) 삼각형이란 세 개의 선분으로 둘러싸인 도형이다(하나의 명제로 인식가능) 한 사각형에서 마주보는 변들이 서로 평행하기 위해서는 마주보는 각의 크기가 서로 같아야 한다. 정사각형은 직사각형이 갖고 있는 성질을 가지고 있기 때문에 정사각형은 직사각형이다.

	시각적 인식	분석	관계
대상	사물	도형	성질
수단	도형	성질	명제
이름	인식	분석	관계
정의	도형 구별	도형을 여러 요소로 분석	도형을 형식적으로 정의
성질		도형의 성질을 직관적으로 혹은 조작적 활동을 통하여 귀납적으로 인식	도형의 성질을 조작적 활동을 통하여 귀납적으로 증명
포함관계			도형의 포함관계를 인식

⑨ 가네 / 손펠드

[가네] : 학습 위계 이론

- ① 학습자들이 어떤 과제를 수행하려고 할 때 그 과제를 수행하는 데 필요한 선행 요건들을 획득하지 못한다면 그 과제를 수행할 수 없다고 가정한다.
- ② 이러한 가정 아래 복합적인 기능을 순서화된 하위 기능으로 분석하기 위해서는 학습 위계 분석이 필요하다는 주장이다.

[손펠드] : 문제 해결 능력 [① 자원 ② 발견술 ③ 통제 ④ 신념체계]

- ① 자원 : 직접 문제에 관련을 지을 수 있는 개인이 소유한 수학적 지식
- ② 발견술 : 생소하고 비표준적인 문제 해결을 진전시키기 위한 전략과 기술
- ③ 통제 : 자원과 전략의 선택과 수행에 관한 전반적인 결정하기
- ④ 신념체계 : 개인의 "수학적인 세계관"

(예) : 수학 문제에는 답도 하나뿐이고, 따라서 그 답을 얻는 방법도 하나 뿐이야.)

① [2015개정] 개념형성모형 (도입 · 정리 생략)★♥

범례 제시 및 범례 분류하기	- 개념의 정의에 필요한 범례(정례와 비례)를 제시하기 - 조작 · 관찰 등에 의해 범례를 여러 가지 속성에 따라 분류하기 - 분류된 예들의 공통 성질을 암묵적으로 생각하기
공통의 성질 추상화하기	- 분류된 예들의 공통된 성질을 명료하게 설명하기 - 분류된 예들의 공통 성질을 추상화하기
개념 정의하기	- 수학적 용어와 기호로 개념을 정의하기
개념 익히기	- 개념을 익히고 개념을 적용하기

[적용상의 유의점]

- 초등학교 학생들의 사고 수준은 구체적 조작기에 있기 때문에 어떤 개념을 지도할 때에는 구체적인 범례를 제시해야 하며 실험 · 실측과 같은 구체적인 활동을 하도록 한다.
- 유사하거나 서로 반대되는 개념을 비교 · 대조하게 하고, 이미 배운 개념들과의 상호 관련성 및 차이점을 강조한다.
- 예인 것(정례)과 예가 아닌 것(비례)을 다양하게 제시하여 공통된 성질을 찾아내게 하되, 변별하기 쉬운 예부터 제시한다.
- 수학적 개념을 구체적 모델, 시각적 모델, 언어적 표현, 기호적 모델로 표현해 보게 한다.

③ 개념 지도 원리★

1. 개념 지도의 주요 원리

- 대조의 원리** : 개념을 지도할 때 대표적인 예를 제시할 필요가 있으나 그 다음 단계에서는 예인 것과 예가 아닌 것을 혼합하여 제시하여야 한다.
- 수학적 다양성의 원리** : 수학의 일반화가 잘 되기 위해 해당 수학의 개념과 관련된 변수를 고정시키고 관련 없는 변수는 다양하게 변화시킨 예들을 학생들에게 제공하여야 한다.★

2. 개념 이미지

- 개념 이미지** : 개념과 관련하여 아동의 마음속에 형성된 모든 표상, 즉 자신의 경험으로부터 재구성된 사적인 개념을 말한다. (◎ : 삼각형의 높이는 항상 내부에 있다, 사다리꼴은 항상 사다리꼴 모양을 하고 있다, 어떤 수를 곱하면 그 결과는 항상 커진다.)
- 지도 방안**
  - 교사는 바람직한 개념 이미지를 형성시키기 위해 적절하고도 풍부한 예를 제공해야 한다.
  - 개념 이미지를 표면으로 이끌어 내어 토론 등을 통해 올바른 개념 이미지를 형성하도록 도와준다.

② 속성 모형

도입	- 선수 학습 상기 및 동기 유발 - 학습 목표 확인
개념의 정의	- 학생들이 학습할 개념을 정의한다.
정례와 비례의 구분	- 정의한 개념의 속성에 맞는 예(정례)와 예가 아닌 것(비례)을 구분한다.
개념의 속성 조사	- 정의한 개념의 결정적 속성과 비결정적 속성을 조사하다.
개념 익히기	- 개념을 익히고 새로운 상황에 개념을 적용한다.
정리 및 평가	- 학습 내용 정리 및 형성 평가 - 차시 예고

④ 도형 개념의 형성 / 정의의 지도

도형 개념의 형성

1) 개념의 구성: 내포와 외연

- 외연**: 한 개념이 지시하는 모든 대상들의 전체 집합을 의미하는 것  
(예) 평행사변형의 외연: 직사각형, 정사각형, 마름모와 같은 특수한 평행사변형과 전형적인 평행사변형들로 이루어진 평행사변형 전체를 의미
- 내포**: 한 개념에 해당되는 대상들이 가지고 있는 공통적인 성질을 의미  
(예) 평행사변형의 내포는 일반적으로 5가지 성질

2) 도형의 개념 지도

외연에 의해 몇 개의 도형을 주고, 그것을 시각적·감각적으로 분류하도록하고, 내포에 의해 분류된 도형에서 공통적인 성질이나 특징을 찾아내도록 한다.

개념을 정의하는 방법에는 **내포적 방법**과 **외연적 방법**, **동의를 방법**이 있다. 동의를 방법은 피정의항과 유사한 의미를 지닌 용어를 사용하여 정의하는 방법이다. 예를 들어 '원'을 '동그라미 모양', '정의'를 '약속(약속하기)'로 정의한다거나,  $2+3=5$ 를 2 더하기 3은 5와 같다. 라고 읽는다.' 라고 정의하는 경우가 이에 속한다. 내포는 개념에 속하는 대상들이 지닌 공통의 속성을 가리키며, 외연은 개념에 속하는 대상들을 가리키므로, 예시적 방법은 개념의 외연을 활용하는 것이라고 볼 수 있다.

정의의 지도

- 공리적 정의**: 수학의 공리와 같이 약속해서 결정하는 것으로 정의한다.  
예를 들면 삼각형의 '높이'에 대한 정의를 내리기 위해 삼각형의 구성 요소인 변과 꼭짓점에 관한 약속이 있은 후, 삼각형의 높이는 꼭짓점에서 밑변에 내린 수선의 길이로 정의한다.
- 내포적 정의(논리적 정의)**: 내포들 중 특징적인 성질을 이용하여 개념을 정의하는 것으로 최근류(最近類)와 종차 (種差)에 의한 정의이다. '직사각형은네 각이 직각인 사각형이다.'에서 직사각형의 상위 개념인 사각형이 최근류이고 이 둘을 구분해 주는 '네 각이 직각'이라는 속성을 종차라 한다.
- 예시적 정의**: 저학년에서 사용되는 정의로서 구체적인 예를 들어 정의한다.  
예를 들면 '성냥 꺾과 같은 모양을 직육면체라고 한다.'는 예시적 정의다

개념학습모형 - 개념형성모형 [적용 예시]

- 도입
 

학생들에게 선수 학습 내용을 상기하도록 하고 학생들의 동기를 유발하고 학습 목표를 제시한다
- 범례 제시 및 범례 분류하기
 

다음 그림과 같이 사각형의 예인 것(정례)과 사각형의 예가 아닌 것(비례)을 다양하게 제시한다. 정례와 비례는 지도하고자 하는 사각형 개념의 특성이 잘 드러나도록 신중하게 제시할 필요가 있다. 또한 정례를 비례보다 많이 제시하는 것이 효과적이며, 이전에 학습한 도형 개념을 고려하여 정례와 비례를 선택해야 한다.

범례를 제시한 다음에는 학생들에게 제시된 범례(정례와 비례)를 공통의 성질을 갖는 것끼리 분류하도록 한다. 이러한 분류 과정에서 학생들은 사각형의 공통 성질을 암묵적으로 생각하게 된다.
- 공통의 성질 추상화하기
 

학생들에게 분류된 정례의 공통 성질을 명확하게 설명하고 공통 성질을 추상화하도록 한다. 학생들은 '네 선분으로 되어 있음', '예리한(각진) 부분이 4군데 있음' 등의 공통 성질을 말할 것이다.
- 개념 정의하기
 

학생들이 추상화한 여러 가지 공통 성질 중에서 정의에 해당하는 성질인 '네 선분으로 둘러싸여 있다'를 이용하여 사각형이라는 개념을 정의(약속)한다.
- 개념의 속성(성질) 조사하기
 

다음 그림과 같은 다양한 사각형을 제시하고, 학생들이 사각형 개념의 결정적 속성(성질)과 비결정적 속성(성질)을 조사하도록 한다. 결정적 속성이란 사각형 개념이 다른 개념과 구별되는 가장 중요한 속성을 말하며, 비결정적 속성은 덜 중요한 속성을 말한다. 사각형 개념의 결정적 속성에는 변이 4개, 꼭짓점이 4개 등이 있으며, 비결정적 속성에는 변의 길이가 길고 짧음, 각의 크기가 크고 작음, 사각형이 수평으로 위치해야 함, 사각형이 옆으로 길어야 함 등이 있다. 학생들이 사각형의 결정적 속성을 찾기 어려울 때는, 학생들에게 다양한 사각형을 제시하고 각각의 사각형에서 변과 꼭짓점의 개수를 세어 보게 한다. 이를 바탕으로 학생들이 사각형은 변이 4개이며, 꼭짓점이 4개인 도형이라는 것을 이해하도록 한다.
- 개념 익히기
 

개념 익히기 단계에서는 예를 들어, 모눈종이에 다양한 사각형을 그리도록 하고, 색종이, 점판, 칠교판, 모양 조각 등을 활용하여 다양한 모양의 사각형을 만들어 보도록 하고, 주변에서 사각형 모양의 물건들을 찾도록 한다. 또한, 여러 가지 도형을 제시하고 사각형을 찾고 그 이유를 설명하도록 함으로써, 사각형의 정의와 성질을 다시 한 번 상기하도록 한다.
- 정리 및 평가
 

학습 내용을 정리하고 평가를 실시하고 차시 수업 내용을 예고한다.

개념학습모형 - 속성모형 [적용 예시]

- 도입
 

학생들에게 선수 학습 내용을 상기하도록 하고 학생들의 동기를 유발하고 학습 목표를 제시한다.
- 개념의 정의
 

평행사변형은 '두 쌍의 대변이 서로 평행인 사각형'임을 정의한다.
- 정례와 비례의 구분
 

다음 그림과 같이 다양한 사각형을 제시하고 평행사변형의 정례와 비례를 구분하도록 지도한다.
- 개념의 속성 조사하기
 

정례와 비례의 구분 단계에서 정례로 분류한 평행사변형을 활용하여 학생들이 평행사변형 개념의 결정적 속성과 비결정적 속성을 조사하도록 지도한다. 평행사변형 개념의 결정적 속성에는 두 쌍의 대변이 서로 평행, 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같음, 두 쌍의 대각의 크기가 각각 같음 등이 있으며, 비결정적 속성에는 변의 길이가 길고 짧음, 각의 크기가 크고 작음, 평행사변형이 수평으로 위치해야 함, 평행사변형이 옆으로 길어야 함 등이 있다.
- 개념 익히기
 

개념 익히기 단계에서는 예를 들어, 모눈종이에 다양한 평행사변형을 그리도록 하고, 색종이, 점판, 칠교판, 모양 조각 등을 활용하여 다양한 모양의 평행사변형을 만들어 보도록 하고, 주변에서 평행사변형 모양의 물건들을 찾도록 한다. 또한, 여러 가지 도형을 제시하고 평행사변형을 찾고 그 이유를 설명하도록 함으로써, 평행사변형의 정의와 성질을 다시 한 번 상기하도록 한다.
- 정리 및 평가
 

학습 내용을 정리하고 평가를 실시하고 차시 수업 내용을 예고한다.

개념학습모형을 적용해볼 수 있는 각론 함께 보기

평행사변형을 알 수 있어요

인원책 53~54쪽

**생각열기** 마을 사각형들만의 공통점은 무엇인지 이야기해 봅시다.

**활동 1** 사각형을 관찰해 보세요.

- 마주 보는 두 쌍의 변이 서로 평행한 사각형을 모두 찾아보세요. 나, 라, 마, 바
- 그렇지 않은 사각형을 모두 찾아보세요. 가, 다

**도형의 이름** 마주 보는 두 쌍의 변이 서로 평행한 사각형을 평행사변형이라고 합니다.

**활동 2** 평행사변형을 모두 찾아보세요.

**활동 3** 주어진 선분을 사용하여 평행사변형을 완성하십시오.

**마무리** 사진 속에서 평행사변형을 찾아 표시하십시오.

① [2015개정] 원리 탐구 수업 모형 (도입 · 정리 생략)★★

새로운 문제 상황 제시	- 새로운 문제 상황을 제시함으로써 학생들의 인지적 갈등 유도하기
수학적 원리의 필요성 인식	- 이전에 습득한 지식을 활용하여 문제 해결 방법을 탐색함으로써 일반적인 수학적 원리의 필요성을 인식하기
수학적 원리가 내재된 조작 활동	- 학습해야 할 수학적 원리가 내재되어 있는 조작활동 하기
수학적 원리의 형식화	- 수학적 원리를 형식화 하기
수학적 원리 익히기 및 적용하기	- 형식화한 수학적 원리를 익히고 적용하기

[적용상의 유의점]

- ① 학습자 스스로 수학적 원리를 탐구하는 과정이 중요하기 때문에 교사의 일방적 수업을 지양하고 학습자의 적극적으로 자발적 참여를 강조한다.
- ② 학생들이 스스로 탐구할 기회를 충분히 제공하되, 학생들의 수준을 고려하여 교사의 안내 정도를 조정한다.
- ③ 원리 탐구 학습은 자료 수집 및 분석을 통하여 특정한 수학적 원리를 찾아내는 것이므로 충분한 자료와 논리적 근거를 바탕으로 수학적 원리를 이끌어 내야 한다.
- ④ 다양한 자료를 통하여 수학적 원리를 확인하고 검증하는 탐구 과정을 강조하면서 탐구심을 길러준다.

② 원리 탐구 수업 모형 [적용 예시]

· 도입

학생들에게 선수 학습 내용을 상기하도록 하고 학생들의 동기를 유발하고 학습 목표를 제시한다.

· 새로운 문제 상황 제시

[활동 1]에서는 받아올림이 있는 (두 자리 수)+(한 자리 수)의 계산, 즉 17+5의 계산이 필요한 생활 장면을 제시하고 있다. 이는 받아올림이 있는 (두 자리 수)+(한 자리 수)의 계산이 필요한 새로운 문제 상황을 제시함으로써 학생들의 인지적 갈등 상황을 유발하기 위한 것이다.

· 수학적 원리의 필요성 인식

[활동 1]에서는 이어서 17+5가 얼마인지를 여러 가지 방법으로 알아보게 한다. 즉, 17+5를 18, 19, 20, 21, 22로 이어세기 하여 22라는 답을 구하거나, 7과 5를 먼저 더해서 12를 구한 다음 10을 더해서 22라는 답을 구하는 등의 여러 가지 방법을 생각하게 한다. 이는 이전의 수학 지식을 이용하여 문제를 다소간은 비효율적으로 해결함으로써 일반적인 수학적 원리의 필요성을 인식하도록 하기 위한 것이다.

· 수학적 원리가 내재된 조작 활동

[활동 2]에서는 일반적인 수학적 원리를 이끌어내는 것을 목적으로 한다. 먼저, 학습할 원리가 내재된 조작 활동으로서, 수 모형을 가지고 받아올림이 이루어지는 장면을 실제로 경험하게 함으로써 계산 원리를 이해하는 데에 도움을 준다.

· 수학적 원리의 형식화

다음으로, 17+5의 계산을 세로 형식으로 써 보게 하고 받아올림을 처리하는 수학적 원리를 형식화한다.

· 익히기 및 적용하기

익히기 및 적용하기는 교과서 <계산을 하시오> 코너와 익힘책 18~20쪽에서 이루어진다. 익힘책 18쪽에서는 받아올림이 있는 (두 자리 수)+(한 자리 수) 계산 방법에 내재되어 있는 수학적 원리에 대한 이해를 돕기 위하여, 다시 한 번 수학적 원리가 내재되어 있는 다양한 조작 활동을 통해 답을 구하는 활동을 한다. 익힘책 19쪽에서는 받아올림이 있는 (두 자리 수)+(한 자리 수)의 계산 방법을 숙달할 수 있도록 연습 문제를 제시하고, 익힘책 20쪽에서는 받아올림이 있는 (두 자리 수)+(한 자리 수) 계산이 적용되는 문장제 해결을 통하여 계산 방법의 적용 능력을 기르게 한다.

· 정리 및 평가

학습 내용을 정리하고 평가를 실시하고 차시 수업 내용을 예고한다.

원리 탐구 수업 모형 적용 교과서 장면



덧셈을 해 볼까요(1)

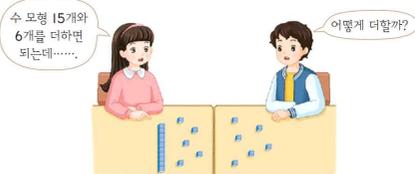
『수학 익힘』 39~40쪽

앵무새는 모두 몇 마리인지 알아보시다.



앵무새는 모두 몇 마리인지 식으로 써 보세요.

수 모형으로 알아보세요.



수 모형으로 어떻게 알아보았는지 이야기해 보세요.

15+6을 어떻게 계산하는지 알아보시다.

일 모형 10개를 십 모형 1개로 바꿀 수 있어요.

십 모형 일 모형 	십 모형 일 모형 	십 모형 일 모형 
$\begin{array}{r} 15 \\ + 6 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 15 \\ + 6 \\ \hline 11 \\ 10 \\ \hline 21 \end{array}$	$\begin{array}{r} 15 \\ + 6 \\ \hline 21 \end{array}$

계산하는 방법을 말해 보세요.

원리 탐구 수업 모형 적용 지도서 각론

● 원리의 필요성 인식하기

- 앵무새 수를 어떻게 알 수 있는지 말해 보세요.
  - 15에 1씩 6번 뛰어 세어 16, 17, 18, 19, 20, 21과 같이 계산할 수 있습니다.
  - 15에 5를 더하고 1을 더하는 방법으로 계산할 수 있습니다.
  - 수 모형, 바둑돌, 모형(연결큐브)을 이용하여 계산할 수 있습니다.

학생들이 덧셈 계산의 알고리즘을 형식화하기 이전이므로 다양한 구체물 또는 반구체물을 이용하여 계산을 하도록 하며 그러한 과정 속에서 계산 원리의 필요성을 느끼게 한다.

● 원리가 내재된 조작 활동하기

- 수 모형을 놓아 가며 알아보까요?
  - (학생 각자가 15+6에 맞게 수 모형을 놓아 가며 알아본다.)

아래와 같은 발문을 하기 전에 학생 스스로 15+6에 맞는 수 모형을 놓고 계산하는 방법을 먼저 탐색하게 한다. 탐색한 방법은 발표를 통해 다른 학생들과 공유하고 조작한 과정을 식으로 형식화하도록 한다. 단, 15+6을 수 모형으로 놓아 계산하는 데 어려움이 있는 학생들이 있다면 아래와 같은 발문을 통해 계산 원리를 파악하도록 지도한다.

- 15와 6을 각각 수 모형으로 놓아 보세요.
  - (십 모형 1개와 일 모형 5개 그리고 일 모형 6개를 놓는다.)
- 일 모형 5개와 일 모형 6개를 더하면 모두 몇 개인가요?
  - 11개입니다.
- 일 모형 11개를 수 모형으로 간단히 나타내는 방법에 대하여 이야기해 보세요.
  - 일 모형 10개를 십 모형 1개로 바꾸어 십 모형 1개와 일 모형 1개로 나타낼 수 있습니다.
- 15+6은 얼마인가요?
  - 21입니다.
- 수 모형으로 어떻게 알아보았는지 이야기해 보세요.
  - 일 모형끼리 더한 11개는 십 모형 1개와 일 모형 1개이므로 십 모형 2개, 일 모형 1개가 되어 21입니다.

● 15+6의 계산 방법 알아보기

● 원리의 형식화하기

- 수 모형으로 놓은 것을 식으로 나타내어 볼까요?
  - (각자 수 모형으로 조작한 과정을 식으로 나타낸다.)

$\begin{array}{r} 15 \\ + 6 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 15 \\ + 6 \\ \hline 11 \\ 10 \\ \hline 21 \end{array}$	$\begin{array}{r} 15 \\ + 6 \\ \hline 21 \end{array}$
--	--	---

왼쪽은 구체물의 조작에서 알아낸 것을 다만 수로 바꾼 과정을 나타낸 것이고, 오른쪽은 기수법에 맞도록 계산 과정을 간단하게 나타낸 것이다. 구체물 조작 과정을 그대로 세로셈으로 형식화하도록 한다. 이때 일의 자리 수끼리의 합이 10이거나 10이 넘는 경우를 나타내는 방법에 주안점을 두어야 한다.

- 일의 자리 수끼리의 합에서 10이거나 10이 넘으면 십의 자리에 받아올림하고 받아올림 표시를 해 준다. 일은 일의 자리에 내려 쓴다.
- 받아올림한 수는 십의 자리의 수와 합하여 내려 쓴다.

- 일의 자리 수 5와 6을 더하면 11이 되는데 어떻게 나타내면 좋을까요?
  - 수 모형에서 일 모형 10개를 십 모형 1개로 바꾼 것처럼 10을 십의 자리로 받아올림하여 십의 자리 위에 작게 1로 나타내고, 남은 1은 일의 자리에 내려 씁니다.
- 계산하는 방법을 말해 보세요.
  - ① 자리에 맞추어 수를 씁니다.
  - ② 일의 자리 수끼리의 합 5+6=11에서 10은 십의 자리로 받아올림하여 십의 자리 위에 작게 1로 나타내고, 남은 1은 일의 자리에 내려 씁니다.
  - ③ 받아올림한 1과 십의 자리 수 1을 합하여 십의 자리에 2를 내려 씁니다.

원리 탐구 수업 모형 적용 교과서 장면



벨셈을 해 볼까요(1)

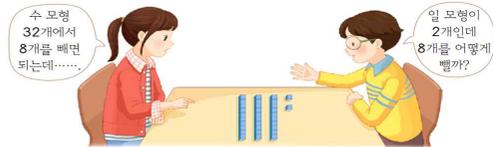
\*수학 익힘, 47-48쪽

우리 안에 있는 얼룩말은 몇 마리인지 알아봅시다.



• 우리 안에 있는 얼룩말은 몇 마리인지 식으로 써 보세요.

• 수 모형으로 알아보세요.



• 수 모형으로 어떻게 알아보았는지 이야기해 보세요.

32-8을 어떻게 계산하는지 알아봅시다.

일 모형끼리 뺄 수 없으면 십 모형 1개를 일 모형 10개로 바꿀 수 있어요.

<p>십 모형 일 모형</p>	<p>십 모형 일 모형</p>	<p>십 모형 일 모형</p>	<p>십 모형 일 모형</p>
$\begin{array}{r} 32 \\ - 8 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 210 \\ 32 \\ - 8 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 210 \\ 32 \\ - 8 \\ \hline 4 \end{array}$	$\begin{array}{r} 210 \\ 22 \\ - 8 \\ \hline 24 \end{array}$

• 계산하는 방법을 말해 보세요.

원리 탐구 수업 모형 적용 지도서 각론

• 원리의 필요성 인식하기

- 우리 안의 얼룩말 수를 어떻게 알 수 있는지 말해 보세요.
  - 32에서 거꾸로 1씩 8번 뛰어 세어 31, 30, 29 ..... 24와 같은 방법으로 계산할 수 있습니다.
  - 32에서 2를 빼고 6을 빼는 방법으로 계산할 수 있습니다.
  - 30에서 8을 빼고 2를 더해 줘도 될 것 같습니다.
  - 수 모형, 바둑돌, 모형(연결큐브)을 이용하여 계산할 수 있습니다.

• 학생들이 계산 원리가 필요하다는 것을 인식할 수 있도록 다양한 비형식적인 방법을 찾아 발표하게 한다.

• 원리가 내재된 조작 활동하기

- 수 모형을 놓아 가며 알아볼까요?
  - (학생 각자가 32-8에 맞게 수 모형을 놓아 가며 알아본다.)

• 아래와 같은 발문을 하기 전에 학생 스스로 32-8에 맞는 수 모형을 놓고 계산하는 방법을 먼저 탐색하게 한다. 탐색한 방법은 발표를 통해 다른 학생들과 공유하고 조작한 과정을 식으로 형식화하도록 한다. 단, 32-8을 수 모형으로 놓아 계산하는 데 어려움이 있는 학생들이 있다면 아래와 같은 발문을 통해 계산 원리를 파악하도록 지도한다.

- 32를 수 모형으로 놓아 보세요.
  - (십 모형 3개와 일 모형 2개를 놓는다.)
- 일 모형 2개에서 일 모형 8개를 뺄 수 있나요?
  - 뺄 수 없습니다.
- 어떻게 하면 될까요?
  - 십 모형 1개를 일 모형 10개로 바꾼 후 빼면 됩니다.
- 십 모형 1개를 일 모형 10개로 바꾸면 일 모형은 모두 몇 개가 될까요? - 12개가 됩니다.
- 일 모형 12개에서 일 모형 8개를 빼면 몇 개가 남나요?
  - 4개가 남습니다.
- 십 모형은 몇 개가 남나요?
  - 2개가 남습니다.
- 32-8은 얼마인가요? - 24입니다.
- 수 모형으로 어떻게 알아보았는지 이야기해 보세요.
  - 십 모형 1개를 일 모형 10개로 바꾸면 일 모형은 12개가 되어 12개에서 8개를 빼면 4개, 십 모형은 2개가 남으므로 24입니다.

32-8의 계산 방법 알아보기

• 원리의 형식화하기

- 수 모형으로 놓은 것을 식으로 나타내어 볼까요?
  - (각자 수 모형으로 조작한 과정을 식으로 나타낸다.)

$\begin{array}{r} 32 \\ - 8 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 32 \\ - 8 \\ \hline 4 \end{array}$	$\begin{array}{r} 210 \\ 32 \\ - 8 \\ \hline 4 \end{array}$	$\begin{array}{r} 210 \\ 22 \\ - 8 \\ \hline 24 \end{array}$
--	--	---	--

• 왼쪽은 구체물의 조작에서 알아낸 것을 다만 수로 바꾼 과정을 나타낸 것이고, 오른쪽은 기수법에 맞도록 계산 과정을 간단하게 나타낸 것이다. 구체물 조작 과정을 그대로 세로셈으로 형식화하도록 한다.

- ① 피감수의 일의 자리 수 2에서 8을 뺄 수 있는지 생각하게 하고, 수 모형의 조작에서 어떤 방법을 사용했는지 상기시킨다.
- ② 수 모형의 조작에서 십 모형 1개를 일 모형 10개로 바꾼 것처럼 십의 자리 수 3을 2로 고치고, 일의 자리 위에 10을 쓰는 방법으로 나타낸다.
- ③ 일의 자리 수끼리 뺀다. 12에서 8을 뺄 수 4를 일의 자리에 내려 쓴다.
- ④ 남은 십의 자리 수는 십의 자리에 내려 쓴다.

- 일의 자리 수 2에서 8을 뺄 수 없는데 십 모형 1개를 일 모형 10개로 바꾸는 과정을 어떻게 수로 나타내면 좋을까요?
  - 수 모형에서 십 모형 3개 중 1개를 일 모형 10개로 바꾼 것처럼 십의 자리 수 3을 지우고 위에 2를 작게 쓴 다음 일의 자리 위에도 10을 작게 씁니다.
- 계산하는 방법을 말해 볼까요?
  - ① 자리에 맞추어 수를 씁니다.
  - ② 2-8을 할 수 없으므로 십의 자리 수 3을 지우고 위에 2를 작게 쓴 다음 일의 자리 위에 10을 작게 쓰고 12에서 8을 뺀 값인 4를 일의 자리에 내려 씁니다.
  - ③ 십의 자리에 남아 있는 2를 십의 자리에 내려 씁니다.

수학적 지식의 형성과정 - 지도서 각론 함께 보기

[수학적 지식의 형성 과정에서 나타나는 특성]

- ㉠ 추상화 : 어떤 구체물의 집합에서 이질적인 요소들은 제거하고 동질적인 요소만을 추출하여 개념을 형성하는 과정
- ㉡ 연필 3자루, 바둑돌 3개, 알파벳 문자 3개(a, b, c) 등과 같은 구체물의 집합에서 구체물의 속성인 모양, 크기, 색깔 등과 같은 서로 이질적인 것은 제거하고 동질적인 속성인 원소의 개수가 3이라는 성질만을 추출하여 자연수 '3'(셋, 삼)의 개념이 형성된다.

[추상성 적용 교과서 장면]

- ㉢ 형식화 : 수학적 지식의 형성 과정에서 추상화를 통해 공통적인 규칙성이나 필요한 규칙이나 원리 등을 만들어 가는 과정
- ㉣ 자연수의 덧셈과 뺄셈에서 위치적 기수법의 성질에 따라서 각 자리의 수들의 위치를 정렬하고, 각 자리에서 받아올림하거나 받아내림하는 것을 각 자리를 고려하여 계산하는 것을 덧셈이나 뺄셈의 형식화한 것이라고 할 수 있다.

[형식화 적용 교과서 장면]

15 + 6을 어떻게 계산하는지 알아보시다.

일 모형 10개를 십 모형 1개로 바꿀 수 있어요.

십 모형 일 모형 십 모형 일 모형 십 모형 일 모형

• 계산하는 방법을 말해 보세요.

- ㉤ 이상화 : 어떤 사물이나 현상에서 그 사물 자체에 속한 현실적인 제약을 무시하고 사고하려고 하는 개념에 맞추어 사물의 속성을 규정하는 과정
- ㉥ 직선이나 원을 아무리 정확하게 그리려고 해도 오차가 전혀 없이 정확한 직선이나 원을 그릴 수는 없다. 수학에서는 현실에서 존재하지 않는 이상화된 직선, 원과 같은 개념을 사용하고 있다.
- ㉦ “사과 12개를 네 사람에게 똑같이 나누어 주면 한 사람에게 몇 개씩 줄 수 있는가?”에서 엄밀하게 말하면 가능하지 않은 “똑같이 나누면”과 같은 개념이 이상화된 개념이다.

[이상화 적용 교과서 장면]

똑같이 나눌 수 있어요 (1)

15명을 세 모둠으로 똑같이 나누어 보시오.

예

바둑돌 8개를 두 접시에 똑같이 나누어 보시오.

예

- 한 접시에 바둑돌을 몇 개씩 놓았습니까? 4개
- 어떤 방법으로 나누었습니까? 다른 방법도 생각해 보시오.  
예 바둑돌을 1개씩 번갈아 가며 놓았습니다.

수학적 지식의 형성과정 - 지도서 각론 함께 보기

[수학적 지식의 적용 및 발전 과정에서 나타나는 특성]

- ㉠ **일반화** : 수학적 지식을 적용하고, 그것이 발전해 가는 과정에서 나타나는 특성으로 추상화된 개념을 보다 확장된 넓은 범위에 적용하는 과정
- ㉡ 3학년에서는 분수의 등분할 개념으로 도입하지만 6학년에서는 비율의 분수, 나누어떨어지지 않는 나눗셈에서 몫의 분수 등으로 분수의 개념을 확장해 간다.
- ㉢ **특수화** : 일반화에 대립되는 개념으로 수학적 지식을 적용하고, 그것이 발전해 가는 과정에서 일반적인 수학적 개념을 특수하고 구체적인 것에 적용하는 과정

[수학적 지식의 보존 및 정리 과정에서 나타나는 특성]

- ㉠ **계통성** : 수학 내용의 위계적이고 누적적인 구성의 특징
- ㉡ 덧셈은 뺄셈과, 곱셈은 나눗셈과 서로 역연산 관계를 가지며 덧셈은 동수누가의 과정을 거쳐 곱셈으로, 뺄셈은 동수누감의 과정을 거쳐 나눗셈으로 발전해 가는 계통성을 가진다.
- ㉢ **논리성** : 이론의 근거를 분명하고 정확하게 하기 위한 것으로, 가정에서 결론을 이끌어내는 분석적이고 단계적인 과정

[일반화 적용 교과서 장면]

똑같이 나눌 수 있어요



- 어떻게 하면 똑같이 나눌 수 있습니까?  
예 반으로 똑같이 자릅니다. / 두 조각으로 똑같이 나눕니다.
- 나눈 것들이 서로 같은지 어떻게 알 수 있습니까?  
예 서로 크기를 비교해 봅니다.  
서로 맞대어 봅니다.

비율을 알 수 있어요

**생각하기** 퀴즈 대회에 참가한 학생은 200명이고, 그중에서 예선을 통과한 학생은 150명입니다. 예선을 통과한 학생 수와 퀴즈 대회에 참가한 학생 수를 비교해 봅시다.

- 활동 1** 예선을 통과한 학생 수는 퀴즈 대회에 참가한 학생 수의 몇 배인지 알아보세요.
  - ▶ 퀴즈 대회에 참가한 학생 수에 대한 예선을 통과한 학생 수를 비로 나타내어 보세요. 150 : 200
  - ▶ 예선을 통과한 학생 수와 퀴즈 대회에 참가한 학생 수의 비를 하나의 수로 나타내는 방법을 이야기해 보세요.  
예 150을 200으로 나눈 몫을 사용하면 좋겠습니다.
  - ▶ 예선을 통과한 학생 수를 퀴즈 대회에 참가한 학생 수로 나누어 그 몫을 소수로 나타내어 보세요. 0.75
  - ▶ 예선을 통과한 학생 수를 퀴즈 대회에 참가한 학생 수로 나누어 그 몫을 분수로 나타내어 보세요.  $\frac{150}{200} (= \frac{3}{4})$

**쓰고 읽기** 비 150 : 200에서 기호 :의 왼쪽에 있는 150은 비교하는 양이고, 오른쪽에 있는 200은 기준량입니다. 비교하는 양을 기준량으로 나눈 값을 비의 값 또는 비율이라고 합니다.

(비율) = (비교하는 양) ÷ (기준량) =  $\frac{\text{(비교하는 양)}}{\text{(기준량)}}$

비 150 : 200을 비율로 나타내면  $\frac{150}{200}$  또는 0.75입니다.

나눗셈의 몫을 분수로 나타낼 수 있어요

**생각하기** 3÷4의 몫을 나타내는 방법을 알아봅시다.



- 활동 1** 1÷4의 몫을 분수로 나타내는 방법을 알아보세요.
  - ▶ 1÷4를 분수의 곱셈으로 나타내어 보세요.  $1 \times \frac{1}{4}$
  - ▶ 1은 4의 몇 번의 몇일까요?  $\frac{1}{4}$
  - ▶ 1÷4의 몫을 분수로 나타내어 보세요.  $\frac{1}{4}$



- 활동 2** 3÷4의 몫을 분수로 나타내는 방법을 알아보세요.
  - ▶ 3÷4를 분수의 곱셈으로 나타내어 보세요.  $3 \times \frac{1}{4}$
  - ▶ 3은 4의 몇 번의 몇일까요?  $\frac{3}{4}$
  - ▶ 3÷4의 몫을 분수로 나타내어 보세요.  $\frac{3}{4}$